Řešení

Cvičení 1. X má hypergeometrické rozdělení s parametry N, K, n.

Cvičení 2. (a) $c = \frac{1}{5}$, X má tedy exponenciální rozdělení s parametrem $\frac{1}{5}$.

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0. \end{cases}$$

(c) $\mathbb{P}(X > 5) = \mathrm{e}^{-1}$

(d) $\mathbb{P}(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}} - \mathrm{e}^{-1}$

(e) $\mathbb{P}(X > 10 | X > 5) = \mathrm{e}^{-1} = \mathbb{P}(X > 5)$. Tomuto jevu říkáme, že rozdělení X je *bez paměti.* Exponenciální rozdělení je jediné spojité rozdělení s touto vlastností.

(f) Definujeme $Y = 5 + 3X$. Y je spojitá náhodná veličina nabývající hodnot v $[5, \infty)$ a platí

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-5}{3}\right) = \begin{cases} 0 & y < 5, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}\left(\frac{y-5}{3}\right)} & y \geq 5, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & y < 5, \\ \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y-5}{15}\right)} & y \geq 5, \end{cases}$$

$\mathbb{P}(Y > 35) = \mathrm{e}^{-2}$.

(g) Definujeme $Z = \lceil X \rceil$ (horní celá část). Z je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot $\{1, 2, \ldots\}$, její rozdělení je určeno pravděpodobnostmi

$$p_k = \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(k - 1 \leq X < k) = F_X(k-1) - F_X(k) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}k}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{5}} - 1\right).$$

(h) Definujeme $U = F_X(X)$. U je spojitá náhodná veličina nabývající hodnot v $[0, 1]$ a platí

$$F_U(u) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq u) = \begin{cases} 0 & u < 0, \\ \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u & u \in [0, 1], \\ 1 & u > 1. \end{cases}$$

(i) Předpokládáme, že umíme generovat náhodná čísla z intervalu $[0, 1]$, tj. generujeme náhodnou veličinu $U \sim R(0, 1)$. Pro generování náhodné veličiny se zadanou distribuční funkcí F z (b) položíme $X = F^{-1}(U)$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že $F^{-1}(U) = -5\ln(1 - U)$. Víme, že $U \in [0, 1]$, a tedy náhodná veličina X nabývá hodnot $[0, \infty)$. Zbývá ověřit, že distribuční funkce X je skutečně F

$$F_X(x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F_U(F(x)) = F(x),$$

neboť $F(x) \in [0, 1]$ a $F_U(u) = u$ pro $u \in [0, 1]$.

Cvičení 3. (a) $c = \frac{1}{2}$, (b) Definujeme $Y = |X|$, pak

$$\mathbb{P}(Y > 2) = \mathbb{P}(X < -2) + \mathbb{P}(X > 2) = \mathrm{e}^{-2}$$